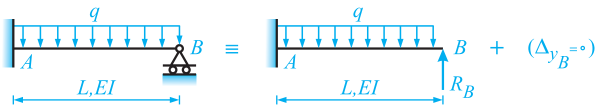
با محاسبهٔ R_B، تیر AB معین شده و می‌توان نوشت:

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow M_A = P \times \frac{L}{2} - R_B \times L = \frac{3PL}{16}$$

(علامت منفی یعنی دروان B پادساعتگرد است)

$$\curvearrowleft \theta_B = \frac{P(\frac{L}{2})^2}{2EI} - \frac{R_B L^2}{2EI} \xrightarrow{R_B = \frac{5P}{16}} \theta_B = -\frac{PL^2}{32EI}$$

تحلیل تیر (3):



جابه‌جایی قائم B، با استفاده از روابط خیز و شیب تیرهای کنسولی به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\downarrow \Delta_{y_B} = \frac{qL^4}{8EI} - \frac{R_B L^3}{3EI} = 0 \Rightarrow R_B = \frac{3qL}{8}$$

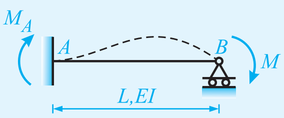
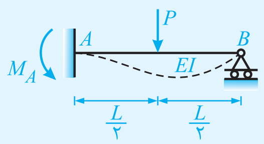
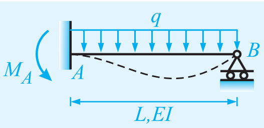
با محاسبهٔ R_B، تیر AB معین شده و داریم:

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow M_A = qL \times \frac{L}{2} - R_B \times L = \frac{qL^2}{8}$$

(علامت منفی یعنی دوران B پادساعتگرد است)

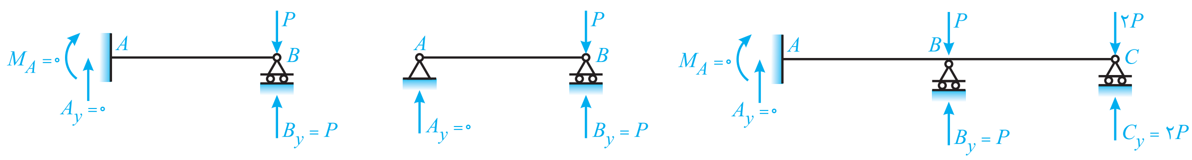
$$\curvearrowleft \theta_B = \frac{qL^3}{6EI} - \frac{R_B L^2}{2EI} \xrightarrow{R_B = \frac{3qL}{8}} \theta_B = -\frac{qL^3}{48EI}$$

تذکر: سه تیر فوق از تیرهای بسیار پر کاربرد در کنکور محسوب شده که برای بررسی سازه‌های پیچیده‌تر، نتایج این تیرها باید بـه خـاطر سپرده شود:

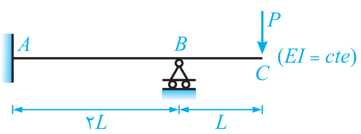
نتایجی که باید به خاطر سپرده شوند	تیر مفصلی گیردار
$M_A = \frac{M}{2}$ (هم جهت با M)، $R_B = \frac{3M}{2L}$، $\theta_B = \frac{ML}{4EI}$ این گونه به خاطر بسپارید: در این حالت، نیمی از لنگر M و در همان جهت به تکیه‌گاه A منتقل می‌شود $(M_A = \frac{M}{2})$.	
$M_A = \frac{3PL}{16}$، $R_B = \frac{5P}{16}$، $\theta_B = \frac{PL^2}{32EI}$	
$M_A = \frac{qL^2}{8}$، $R_B = \frac{3qL}{8}$، $\theta_B = \frac{qL^3}{48EI}$	

در ادامه پس از یک تذکر، با حل چند مثال متنوع، نحوهٔ استفاده از نتایج این تیرها را به شما یاد می‌دهیم.

تذکر: در تیرهای زیر که نیروی P مستقیماً بر روی تکیه‌گاه ثابت اثر کرده است، تمام نیروی P توسط تکیه‌گاه تحمل شده و برش و خمش در تمام طول تیر صفر است. در این حالت هیچ‌گونه تغییر شکلی در تیر ایجاد نمی‌شود.



تمرین ۱۲-۳: در تیر مقابل مطلوبست:

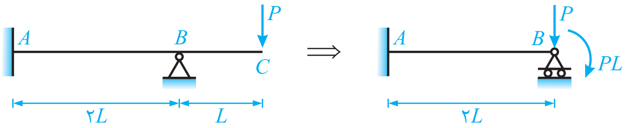


الف) لنگر در تکیه‌گاه A **ب)** تغییر مکان قائم نقطهٔ C

حل:

الف) همان‌طور که مشاهده می‌کنید، قطعهٔ AB یک تیر مفصلی گیردار می‌باشد که توسط قطعهٔ کنسولی BC گسـترش یافتـه اسـت. بـرای

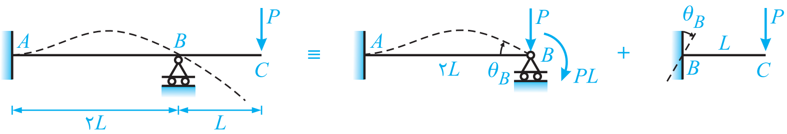
محاسبهٔ لنگر در نقطهٔ A در این تیر، با استفاده از نتایج ارائه شده در جدول قبل به صورت زیر عمل می‌کنیم:



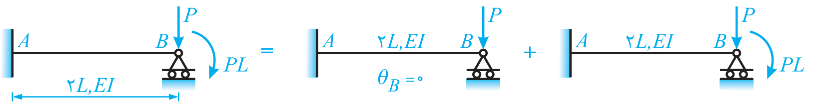
$$\Rightarrow M_A = \frac{PL}{2}$$

در سازهٔ حاصل نیروی P هیچگونه لنگری را در A ایجاد نکرده و نیمی از لنگر PL و در همان جهت به تکیه‌گاه A منتقل می‌شود.

ب) برای محاسبهٔ جابه‌جایی نقطهٔ C از سر آزاد کنسول، مشابه با آن چه در تمرین (9-27) در فصل نهم یاد گرفتیم، مشابه با تیرهای پیش‌آمده می‌توان تغییر شکل ایجاد شده در آن را به صورت زیر معادل‌سازی نمود:

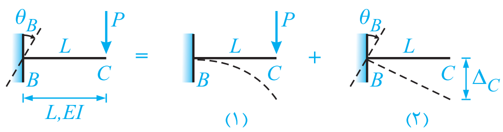


به عبارت ساده‌تر، قطعهٔ کنسولی مانند یک تیر کنسولی است که در نقطهٔ B دچار نشست دورانی تکیه‌گاه شده است. بنابراین برای محاسبهٔ تغییر مکان قائم نقطهٔ C کافی است دوران B را از تیر مفصلی گیردار با استفاده از جدول ارائه شده به‌دست آورده و در نهایت جابه‌جایی نقطهٔ C را به‌دست آوریم:



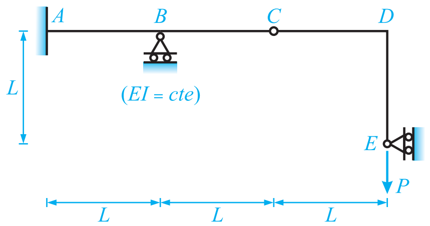
$$\Rightarrow \theta_B = \frac{M \times 2L}{4EI} = \frac{PL^2}{2EI}$$

تغییر شکل قسمت کنسول BC به صورت زیر می‌باشد:

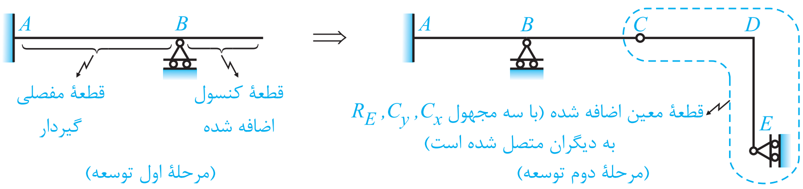


$$\downarrow \Delta_C = \Delta_{C_1} + \Delta_{C_2} = \frac{PL^3}{3EI} + \frac{PL^2}{2EI} \times L = \frac{5}{6}\frac{PL^3}{EI}$$

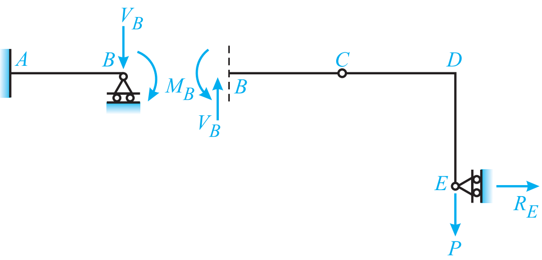
تمرین ۱۲-۴: در سازهٔ مقابل، اگر تکیه‌گاه B تحت نیروهای وارده به‌طور کلی خراب شود، چه نیرویی رو به بالا به این نقطه وارد کنیم تا B ثابت بماند؟



حل: با کمی دقت مشاهده می‌کنید که قطعهٔ AB از این سازه یک تیر مفصلی گیردار است که با اضافه شدن قطعه‌هایی به آن، توسعه یافته است. مراحل توسعهٔ شکل، به‌صورت زیر است:



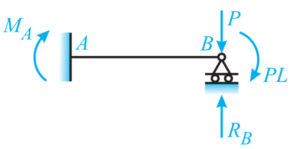
برای محاسبهٔ عکس‌العمل تکیه‌گاه B، کافی است قطعه‌های اضافه شده به قسمت AB را حذف کرده و نیروهای داخلی را در محل تکیه‌گاه B به صورت زیر محاسبه کنیم:



تعادل قطعهٔ CDE : $\sum M_C = 0 \Rightarrow R_E = P$

تعادل قطعهٔ $BCDE$: $\begin{cases} \sum F_y = 0 \Rightarrow V_B = P \\ \sum M_B = 0 \Rightarrow M_B = PL \end{cases}$

در ادامه، تیر مفصلی گیردار AB را درنظر گرفته و با استفاده از روابط ارائه شده در جدول قبل داریم:

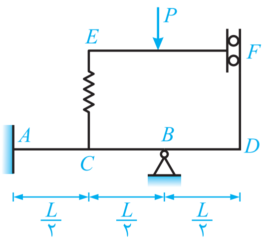


$M_A = \frac{PL}{2} \Rightarrow$ (نیمی از لنگر PL هم‌جهت با آن به A منتقل می‌شود.)

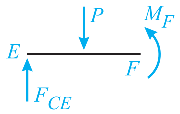
$$\sum M_A = 0 \Rightarrow M_A + PL + PL - R_B L = 0 \Rightarrow R_B = \frac{5P}{2}$$

حال اگر تکیه‌گاه B خراب شود، ما باید نیروی $\frac{5P}{2}$ را رو به بالا به آن وارد کنیم تا مانع از جابه‌جایی نقطهٔ B شویم.

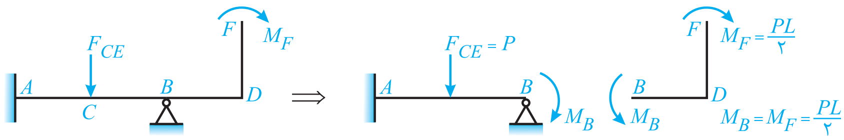
تمرین ۱۲-۵: در سازهٔ مقابل، لنگر خمشی در تکیه‌گاه A کدام است؟ (EI در اعضاء یکسان است.)



حل: با کمی دقت مشاهده می‌کنیم که تیر ACB، یک تیر مفصلی گیردار بوده که با اضافه شدن قطعه‌هایی توسعه یافته است. برای یافتن لنگر در تکیه‌گاه A، کافی است نیروی داخلی در نقطهٔ میانی این تیر (C) و نیروهای داخلی در نقطهٔ B از این تیر را به‌دست آورد:

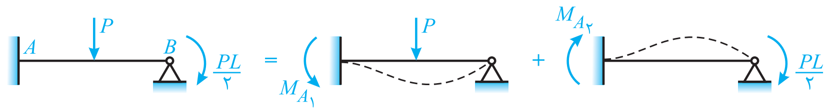


$$EF \text{ تعادل قطعهٔ}: \begin{cases} \sum F_y = 0 \Rightarrow F_{CE} = P \\ \sum M_E = 0 \Rightarrow M_F = \dfrac{PL}{2} \end{cases}$$



(مرحله اول کوچک کردن) (مرحله دوم کوچک کردن)

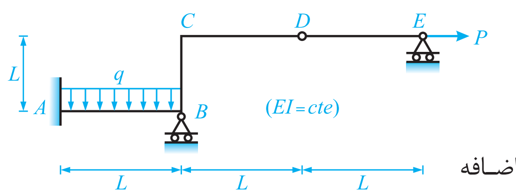
در ادامه با استفاده از اصل جمع آثار قوا و استفاده از جدول مربوط به تیرهای مفصلی گیردار می‌توانیم بنویسیم:



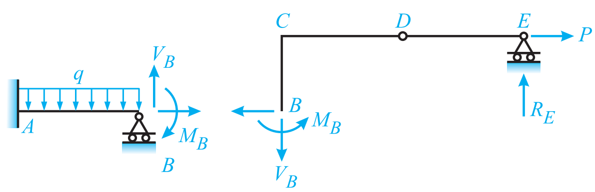
$$M_{A_1} = \frac{3PL}{16} \quad , \quad M_{A_2} = \frac{1}{2} \times \frac{PL}{2} = \frac{PL}{4}$$

$$M_A = M_{A_1} + M_{A_2} = \underbrace{-}_{\text{پاد ساعتگرد}} \frac{3PL}{16} \underbrace{+}_{\text{ساعتگرد}} \frac{PL}{4} = \frac{PL}{16}$$

تمرین ۱۲-۶: در سازهٔ مقابل، نیروی P چقدر باشد تا لنگر در تکیه‌گاه A صفر شود؟



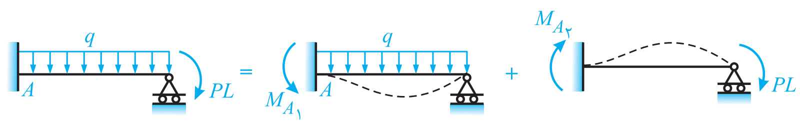
حل: با کمی دقت مشاهده می‌کنیم که تیر AB یک تیر مفصلی گیردار بوده که با اضافه شدن قطعهٔ $BCDE$، توسعه یافته است. برای محاسبهٔ لنگر در تکیه‌گاه A، کافی است نیروهای داخلی در B را محاسبه کرده تا بتوان از روابط ارائه شده برای این تیر لنگر در نقطهٔ A را به‌دست آورد:



$$DE \text{ تعادل}: \sum M_D = 0 \Rightarrow R_E = 0$$

$$BCDE \text{ تعادل}: \begin{cases} \sum M_B = 0 \Rightarrow M_B = PL \\ \sum F_y = 0 \Rightarrow V_B = 0 \end{cases}$$

در ادامه با استفاده از روابط ارائه شده در جدول تیرهای مفصلی گیردار داریم:



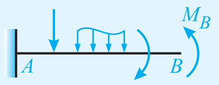
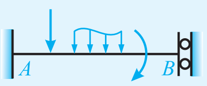
$$M_{A_1} = \frac{qL^2}{8} \quad , \quad M_{A_2} = \frac{1}{2} \times PL$$

$$M_A = M_{A_1} + M_{A_2} = -\frac{qL^2}{8} + \frac{PL}{2} = 0 \Rightarrow P = \frac{qL}{4}$$

در این قسمت و پس از حل چند تمرین، می‌خواهیم به بررسی موضوعات تکمیلی آن بپردازیم.

نکات کاربردی در تیرهای نامعین کنسولی به شرح زیر است:

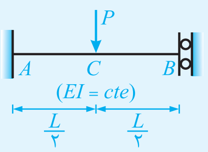
1- تیر گیردار، لغزنده گیردار زیر را درنظر بگیرید. برای حل این تیر نامعین، نحوهٔ مناسب آزادسازی قید و معادلهٔ سازگاری متناظر با آن به صورت زیر است:

معادلهٔ سازگاری	تیر آزاد شده	تیر اصلی
به دلیل وجود تکیه‌گاه لغزنده گیردار در B، شیب تیر در نقطهٔ B صفر است $(\theta_B = 0)$.		

برای درک بهتر این موضوع، به سازهٔ اشاره شده در شکل زیر توجه شود:

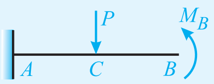
سازه مورد بررسی برای درک بهتر نکتهٔ کاربردی (1)

تیر مقابل را درنظر بگیرید. می‌خواهیم لنگر در تکیه‌گاه A و جابه‌جایی نقطهٔ B از آن را به‌دست آوریم:



مراحل حل:

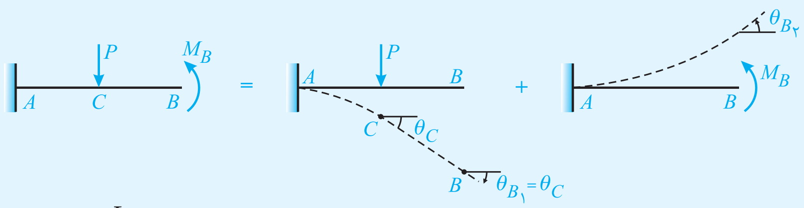
1- قید لنگر را در نقطهٔ B از تیر آزاد کرده و به یاد قید حذف شده، یک لنگر با جهت دلخواه در نقطهٔ B از تیر آزاد شده وارد می‌کنیم:



2- معادلهٔ سازگاری متناظر با قید حذف شده را تعریف می‌کنیم:

$$\theta_B = 0$$

3- معادلهٔ سازگاری را با استفاده از روابط خیز و شیب تیرهای کنسولی، مطابق فصل قبل جایگذاری می‌کنیم:

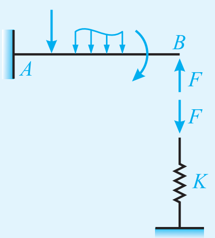
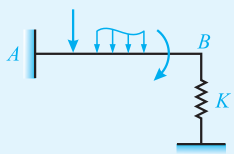


$$\theta_B = \frac{P\left(\frac{L}{2}\right)^2}{2EI} - \frac{M_B L}{EI} = 0 \Rightarrow M_B = \frac{PL}{8}$$

4- در ادامه سایر مجهولات سازه را به‌دست می‌آوریم:

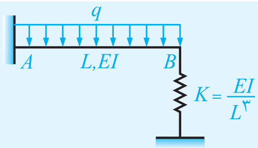
$$\downarrow \Delta_B = \Delta_{B_1} + \Delta_{B_2} = \left[\frac{P\left(\frac{L}{2}\right)^3}{3EI} + \frac{P\left(\frac{L}{2}\right)^2}{2EI} \times \frac{L}{2}\right] - \frac{M_B L^2}{2EI} = \frac{PL^3}{24EI}$$

2- تیر کنسولی فنردار و نامعین زیر را درنظر بگیرید. برای بررسی این تیر نامعین، نحوهٔ مناسب آزادسازی قید و معادلهٔ سازگاری متناظر با آن به صورت زیر است:

معادلهٔ سازگاری	تیر آزاد شده	تیر اصلی
جابه‌جایی نقطهٔ B با تغییر طول فنر برابر است. $\Delta_B = \Delta_{\text{فنر}} = \frac{F}{K}$		

برای درک بهتر این موضوع به سازه اشاره شده در شکل زیر توجه شود:

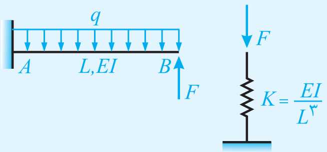
سازهٔ مورد بررسی برای درک بهتر نکتهٔ کاربردی شمارهٔ (2)



تیر مقابل را درنظر بگیرید. می‌خواهیم لنگر در تکیه‌گاه A و نیروی فنر را در این تیر به‌دست آوریم:

مراحل حل:

1- ابتدا فنر را از تیر جدا کرده و در محل B، یک نیروی مجهول در راستای قائم با جهت دلخواه به یاد فنر حذف شده بر تیر وارد می‌کنیم.



2- معادلهٔ سازگاری متناظر با قید آزاد شده را تعریف می‌کنیم:

$$\downarrow \Delta_{B_y} = \Delta_{\text{فنر}} = \frac{F}{\frac{EI}{L^3}}$$

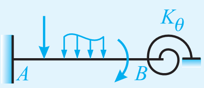
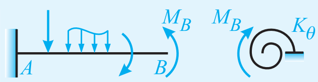
3- معادلهٔ سازگاری را با استفاده از روابط حفظی خیز و شیب در تیرهای کنسولی در فصل 9، به صورت زیر جایگذاری می‌کنیم:

$$\frac{qL^4}{8EI} - \frac{FL^3}{3EI} = \frac{F}{\frac{EI}{L^3}} \Rightarrow F = \frac{3qL}{32}$$

4- پس از محاسبهٔ F، سایر مجهولات موردنظر نیز به سادگی به‌دست می‌آید. به طور مثال با لنگرگیری حول A، لنگر M_A برابر است با:

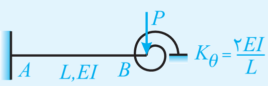
$$M_A = \frac{qL^2}{2} - F \times L = \frac{13qL^2}{32}$$

3- تیر کنسولی فنردار و نامعین زیر را درنظر بگیرید. برای حل این تیر نامعین، نحوهٔ مناسب آزادسازی تیر و معادلهٔ سازگاری متناظر با آن به صورت زیر است:

تیر اصلی	تیر آزاد شده	معادلهٔ سازگاری
		شیب نقطهٔ B از تیر با دوران فنر متصل به آن برابر است. $\curvearrowleft \theta_B = \theta_{\text{فنر}} = \frac{M_B}{K_\theta}$

برای درک بهتر این موضوع، به سازهٔ اشاره شده در شکل زیر توجه کنید.

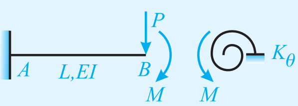
سازهٔ مورد بررسی برای درک بهتر نکتهٔ کاربردی شمارهٔ (3)



تیر مقابل را درنظر بگیرید. می‌خواهیم لنگر در تکیه‌گاه A و جابه‌جایی نقطهٔ B از تیر را به‌دست آوریم:

مراحل حل:

1- ابتدا فنر دورانی را از تیر جدا کرده و در نقطهٔ B از تیر یک لنگر مجهول را با جهت دلخواه، به یاد فنر حذف شده وارد می‌کنیم.



2- معادلهٔ سازگاری متناظر با قید آزاد شده عبارت است از:

$$\curvearrowleft \theta_B = \theta_{\text{فنر}}$$

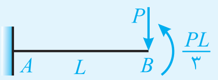
3- معادلهٔ سازگاری را با استفاده از روابط رایج خیز و شیب در تیرهای کنسولی مطابق فصل (9) جایگذاری می‌کنیم. (دقت شود دوران فنر در خلاف جهت قراردادی در رابطهٔ سازگاری بوده و علامت آن منفی است.)

$$\frac{PL^2}{2EI} + \frac{ML}{EI} = -\frac{M}{\frac{2EI}{L}} \Rightarrow M = -\frac{PL}{3}$$

(علامت منفی یعنی جهت لنگر M، اشتباه درنظر گرفته شده است)

سازهٔ مورد بررسی برای درک بهتر نکتهٔ کاربردی شمارهٔ (3)

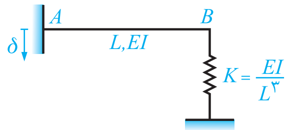
- با توجه به تیر زیر، سایر مجهولات موردنظر خود را محاسبه می‌کنیم:



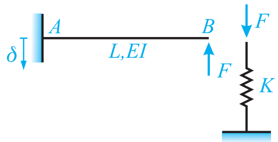
$$\sum M_A = 0 \Rightarrow M_A = PL - M = PL - \frac{PL}{3} = \frac{2PL}{3}$$

$$\downarrow \Delta_B = \frac{PL^3}{3EI} - \frac{(\frac{PL}{3})L^2}{2EI} = \frac{PL^3}{6EI}$$

تمرین ۱۲-۷: در سازهٔ مقابل، در اثر نشست تکیه‌گاه A به مقدار δ، جابه‌جایی نقطهٔ B چقدر است؟

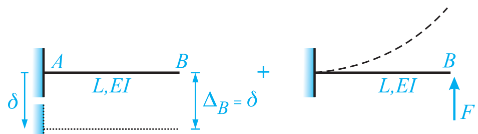


حل: همان‌گونه که مشاهده می‌کنیم، این سازه یک درجه نامعین بوده و برای حل به روش نرمی، با توجه به توضیحات داده شده باید فنر را از آن جدا کنیم. سازهٔ آزاد شده به همراه معادلهٔ سازگاری آن به صورت زیر می‌باشد:



$\downarrow \Delta_B = \Delta_{\text{فنر}}$ (معادلهٔ سازگاری)

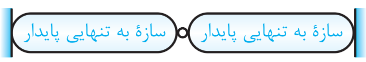
با جایگذاری Δ_B از روابط حفظی خیز و شیب تیرهای کنسولی در رابطهٔسازگاری داریم:



$$\downarrow \Delta_B = \Delta_{\text{فنر}} \Rightarrow \delta - \frac{FL^3}{3EI} = \frac{F}{\frac{EI}{L^3}} \Rightarrow F = \frac{3EI\delta}{4L^3} \Rightarrow \Delta_B = \Delta_{\text{فنر}} = \frac{F}{\frac{EI}{L^3}} = \frac{3\delta}{4}$$

B-۲- مدل اتصال نامعین دو سازه توسط مفصل خمشی و یا مفصل برشی

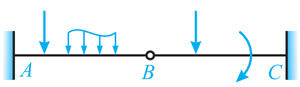
در این قسمت به بررسی شیوهٔ حل دو سبک سؤال پر کاربرد، در کنکور می‌پردازیم:



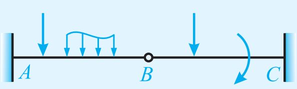
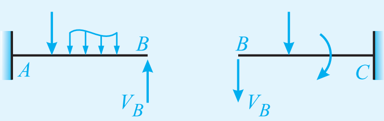
(۱)

(۲)

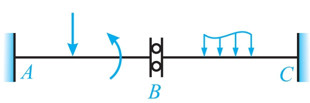
1- در شکل مقابل، دو سازهٔ به تنهایی پایدار AB و BC، توسط یک مفصل خمشی در نقطهٔ B به یکدیگر متصل شده‌اند و این تیر یک درجه نامعین است.



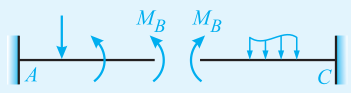
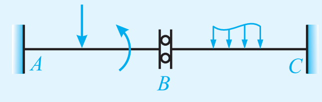
برای حل این سازه، با توجه به توضیحات ابتدای فصل، معادلهٔ سازگاری به صورت‌های مختلفی می‌تواند نوشته شود. همان‌طور که گفتیم معادلهٔ سازگاری که ساده‌ترین شیوه حل را داشته و کمترین زمان حل را نیاز دارد، معادله‌ای است که ما را به تیرهای کنسولی (یا شبه‌کنسولی) برساند. نحوهٔ آزادسازی قید و معادلهٔ سازگاری تیر در این حالت عبارت است از:

تیر اصلی	تیر آزاد شده	معادلهٔ سازگاری
	 (در تیر نیروهای محوری حضور ندارند.)	خیز سمت چپ و راست مفصل خمشی برابر است. $\downarrow \Delta_B^L = \Delta_B^R$

2- در شکل مقابل، دو سازهٔ به تنهایی پایدار AB و BC توسط مفصل برشی B به یکدیگر متصل شده و تیر یک درجه نامعین است. ساده‌ترین نوع آزادسازی و معادلهٔ سازگاری مربوط به آن در این حالت

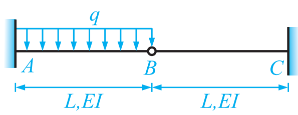


عبارت است از:

معادلهٔ سازگاری	تیر آزاد شده	تیر اصلی
شیب سمت چپ و راست مفصل برشی برابر است. $\curvearrowleft \theta_B^L = \theta_B^R$	 (در تیر نیروی محوری حضور ندارد)	

در ادامه با بررسی چند تمرین متنوع، شیوهٔ حل این نوع سازه‌ها را به طور کامل به شما آموزش می‌دهیم.

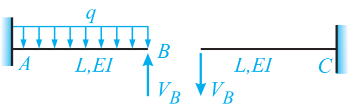
تمرین ۱۲-۸: در تیر نامعین مقابل مطلوبست:



الف) لنگرهای تکیه‌گاهی. **ب)** شیب سمت چپ مفصل B.

حل:

الف) سازه از اتصال دو کنسول توسط یک مفصل خمشی تشکیل شده و با توجه به توضیحاتی که دادیم، سازهٔ آزاد شده و معادلهٔ سازگاری آن به صورت زیر درنظر گرفته می‌شود:



معادلهٔ سازگاری: $\downarrow \Delta_B^L = \Delta_B^R$

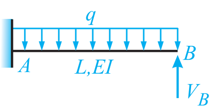
دقت شود که جهت نیروی V_B در نتایج تحلیل تأثیری نداشته و اگر اشتباه فرض شود، مقدار آن در انتهای حل منفی به‌دست می‌آید (روشن است که تحت بارگذاری وارده، B به سمت پایین جابه‌جا می‌شود و بنابراین V_B در قطعهٔ سمت راست BC که فاقد بارگذاری است به سمت پایین باید باشد در ادامه با محاسبهٔ Δ_B^L و Δ_B^R با کمک فرمول‌ها و روابط فصل (9) و جایگذاری آن‌ها در معادلهٔ سازگاری داریم:

$$\Delta_B^L = \Delta_B^R \Rightarrow \frac{qL^4}{8EI} - \frac{V_B L^3}{3EI} = \frac{V_B L^3}{3EI} \Rightarrow V_B = \frac{3qL}{16}$$

$$M_A = \frac{qL^2}{2} - V_B L = \frac{qL^2}{2} - \frac{3qL^2}{16} = \frac{5qL^2}{16}$$

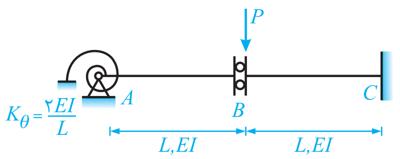
$$M_C = V_B L = \frac{3qL^2}{16}$$

ب) برای محاسبهٔ دوران در سمت چپ مفصل B از قسمت AB کمک گرفته و داریم:



$$\curvearrowleft \theta_B^L = \frac{qL^3}{6EI} - \frac{V_B L^2}{2EI} = \frac{7qL^3}{96EI}$$

تمرین ۱۲-۹: در سازهٔ مقابل، مطلوبست:

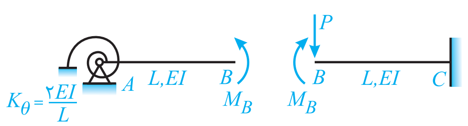


الف) لنگر ایجاد شده در فنر.

ب) انرژی کرنشی ذخیره شده در سازه.

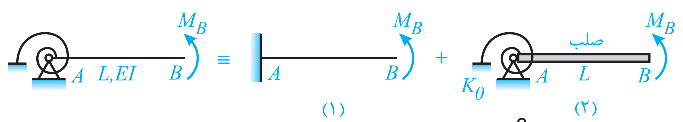
حل:

الف) سازه از اتصال دو جسم به تنهایی پایدار (AB و BC) توسط یک مفصل برشی تشکیل شده و لذا سازهٔ آزاد شده و معادلهٔ سازگاری مناسب برای آن به صورت زیر می‌باشد:



معادلهٔ سازگاری: $\curvearrowleft \theta_B^L = \theta_B^R$

برای محاسبهٔ θ_B^L در قطعهٔ AB مانند فصل (9)، آن را به صورت مجموع دو سازهٔ زیر درنظر می‌گیریم:



$$\curvearrowleft \theta_{B_1} = -\frac{M_B L}{EI} \qquad \curvearrowleft \theta_{B_2} = \theta_{\text{فنر}} = -\frac{M_{\text{فنر}}}{K_\theta} = -\frac{M_B}{\frac{2EI}{L}}$$

$$\curvearrowleft \theta_B^L = -\frac{M_B L}{EI} - \frac{M_B}{\frac{2EI}{L}} \quad , \quad \theta_{B_R} = \frac{M_B L}{EI} - \frac{PL^2}{2EI}$$

$$\xrightarrow{\text{جایگذاری در رابطهٔ سازگاری}} -\frac{M_B L}{EI} - \frac{M_B}{\frac{2EI}{L}} = -\frac{PL^2}{2EI} + \frac{M_B L}{EI} \Rightarrow M_B = \frac{PL}{5} \Rightarrow M_{\text{فنر}} = \frac{PL}{5}$$

دقت شود که با توجه به جهت مثبت نشان داده شده، θ در جهت ساعتگرد مثبت و در جهت پادساعتگرد منفی درنظر گرفته شده است.

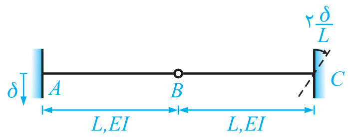
ب) با توجه به این که تنها یک نیروی متمرکز بر سازه اثر کرده است، انرژی کرنشی در سازه به صورت زیر ساده‌تر محاسبه می‌شود.

$$U=\frac{1}{2}P\times(\text{تغییر مکان در راستای نیرو})=\frac{1}{2}\times P\times\Delta_B^R$$

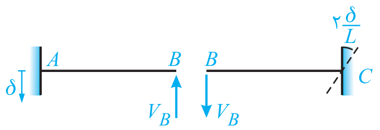
بنابراین برای حل قسمت ب، کافی است جابه‌جایی سمت راست مفصل برشی را به‌دست آوریم:

$$\downarrow\Delta_B^R=\frac{PL^3}{3EI}-\frac{M_BL^2}{2EI}=\frac{PL^3}{3EI}-\frac{PL^3}{10EI}=\frac{7PL^3}{30EI}\Rightarrow U=\frac{1}{2}\times P\times\frac{7PL^3}{30EI}=\frac{7P^2L^3}{60EI}$$

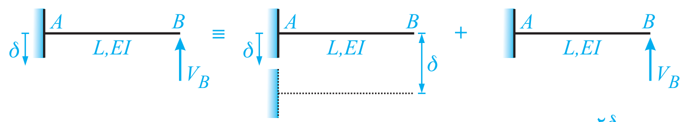
تمرین ۱۲-۱۰: در اثر نشست تکیه‌گاه‌های A و C مطابق شکل، جابه‌جایی مفصل B چقدر است؟



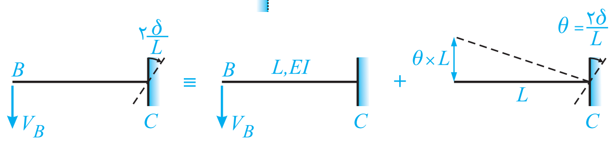
حل: با اندکی دقت ملاحظه می‌شود که سازهٔ نامعین نشان داده شده از اتصال دو قطعهٔ کنسولی، توسط یک مفصل خمشی تشکیل شده و یک درجه نامعین است. برای حل ابتدا سازهٔ آزاد شده و معادلهٔ سازگاری را برای آن به صورت زیر درنظر می‌گیریم:



معادلهٔ سازگاری: $\downarrow\Delta_B^L=\downarrow\Delta_B^R$



$$\Rightarrow\downarrow\Delta_B^L=\delta-\frac{V_BL^3}{3EI}$$



$$\Rightarrow\downarrow\Delta_B^R=\frac{V_BL^3}{3EI}-\frac{2\delta}{L}\times L$$

در ادامه با جایگذاری مقادیر Δ_B^L و Δ_B^R در رابطهٔ سازگاری داریم:

$$\Delta_B^L=\Delta_B^R\Rightarrow\delta-\frac{V_BL^3}{3EI}=\frac{V_BL^3}{3EI}-\frac{2\delta}{L}\times L\Rightarrow V_B=\frac{9EI\delta}{2L^3}$$

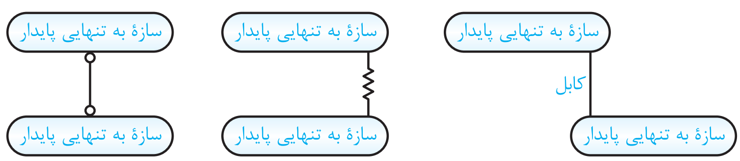
در ادامه برای محاسبهٔ Δ_B در تیر با کمک گرفتن از قطعهٔ سمت چپ و یا سمت راست می‌توان نوشت:

نقطهٔ B به سمت بالا جابه‌جا می‌شود.

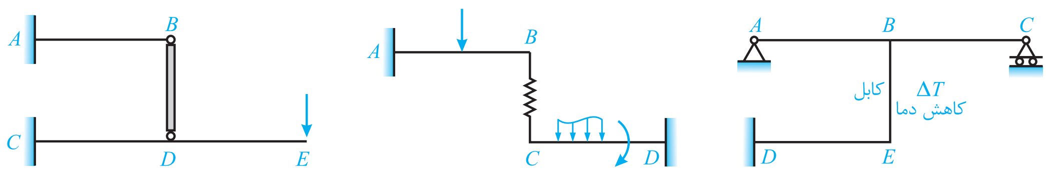
$$\downarrow\Delta_B=\delta-\frac{V_BL^3}{3EI}=\delta-\frac{\frac{9EI\delta}{2L^3}\times L^3}{3EI}=\ominus\frac{\delta}{2}$$

B-۳- مدل اتصال نامعین دو سازه توسط میله، فنر و یا کابل

الگوی کلی سازه‌هایی که در این قسمت در مورد آن بحث می‌کنیم، به صورت زیر می‌باشد:

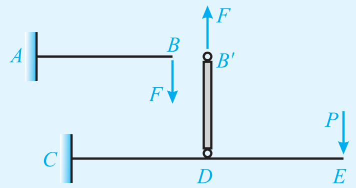
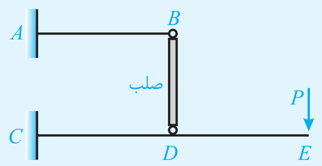
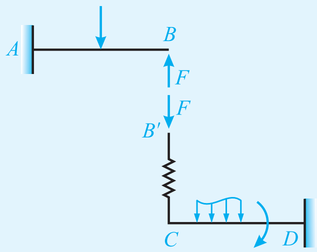
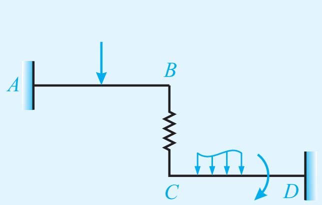
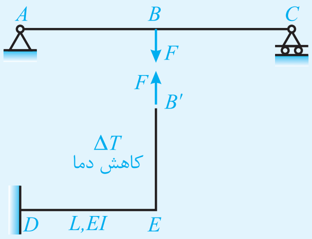
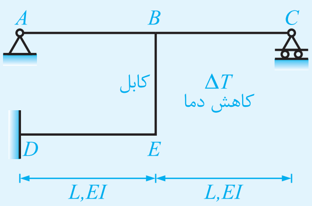


به سازه‌های زیر توجه کنید:



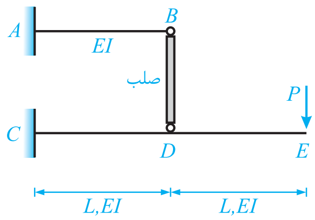
هر یک از این سازه‌ها از اتصال دو قسمت به تنهایی پایدار توسط یک میله، فنر و یا کابل تشکیل شده‌اند و از الگوهای فوق پیروی می‌کنند. ساده‌ترین روند برای حل کلی این گونه از سازه‌ها، جدا سازی سازه از محل اتصال سازهٔ فوقانی یا تحتانی به میله، فنر و یا کابل است. جدول

زیر سازهٔ آزاد شده و معادلهٔ سازگاری مناسب برای این سازه‌ها را ارائه می‌کند:

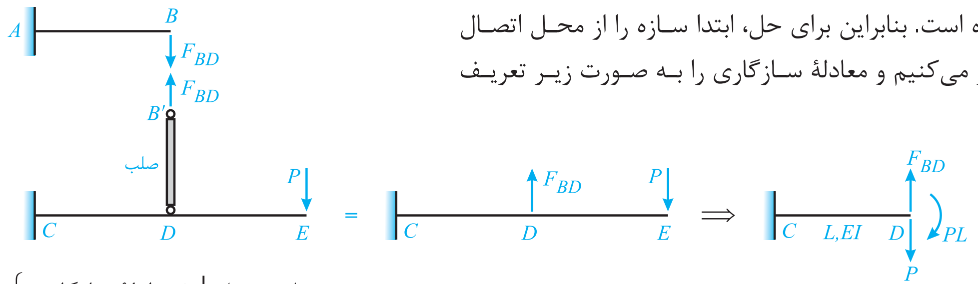
معادلهٔ سازگاری	سازهٔ آزاد شده	سازهٔ اصلی
جابه‌جایی نقطهٔ B و B' یکسان است. $\downarrow \Delta_B = \Delta_{B'}$ **تذکر:** با توجه به صلب بودن میلهٔ $B'D$، داریم: $\Delta_{B'} = \Delta_D$		
جابه‌جایی نقاط B و B' یکسان است. $\downarrow \Delta_B = \Delta_{B'}$ **تذکر:** جابه‌جایی نقطهٔ B'، برابر مجموع تغییر طول فنر و جابه‌جایی نقطهٔ C می‌باشد. $\downarrow \Delta_{B'} = \Delta_{\text{فنر}} + \Delta_C$		
جابه‌جایی نقطهٔ B و B' یکسان است: $\downarrow \Delta_B = \Delta_{B'}$ **تذکر:** جابه‌جایی نقطهٔ B'، برابر مجموع تغییر طول کابل و جابه‌جایی نقطهٔ E می‌باشد: $\downarrow \Delta_{B'} = \Delta_{B'E} + \Delta_E$		

در ادامه، برای درک بهتر روند حل اینگونه از سازه‌ها مثال‌های زیر را برایتان حل می‌کنیم.

تمرین ۱۲-۱۱: در سازهٔ نامعین زیر، لنگر تکیه‌گاه A و C را به‌دست آورید.



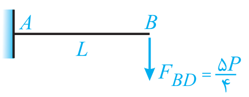
حل: با کمی دقت مشاهده می‌شود که این سازه از اتصال دو جسم به تنهایی پایدار، توسط یک میلهٔ صلب تشکیل شده است. بنابراین برای حل، ابتدا سازه را از محل اتصال میلهٔ صلب BD و تیر AB در B باز می‌کنیم و معادلهٔ سازگاری را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:



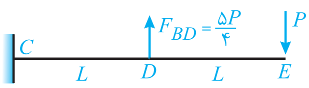
$$\left\{\begin{array}{l} \text{معادلهٔ سازگاری}: \downarrow \Delta_B = \Delta_{B'} \\ \Delta_{B'} = \Delta_D \ (\text{با توجه به صلب بودن عضو } BD) \end{array}\right. \Rightarrow \text{معادلهٔ سازگاری}: \downarrow \Delta_B = \Delta_D$$

در ادامه با استفاده از روابط خیز و شیب در معادلهٔ سازگاری داریم:

$$\downarrow \Delta_B = \Delta_D \Rightarrow \frac{F_{BD} \times L^3}{3EI} = \frac{(P - F_{BD})L^3}{3EI} + \frac{PL \times L^2}{2EI} \Rightarrow F_{BD} = \frac{5P}{4} \ (\text{نیروی عضو صلب})$$

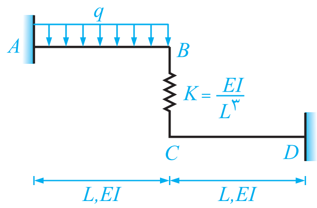


$$\Rightarrow M_A = \frac{5PL}{4}$$

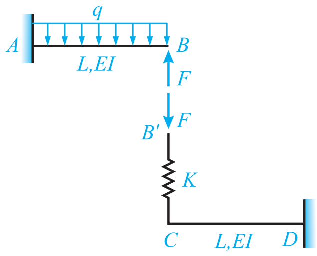


$$\Rightarrow M_C = 2PL - \frac{5PL}{4} = \frac{3PL}{4}$$

تمرین ۱۲-۱۲: در سازهٔ نامعین مقابل، نیروی فنر BC را به‌دست آورید.



حل: سازه از اتصال دو جسم به تنهایی پایدار AB و CD، توسط یک فنر تشکیل شده است، بنابراین ابتدا سازه را از محل اتصال در B باز می‌کنیم:



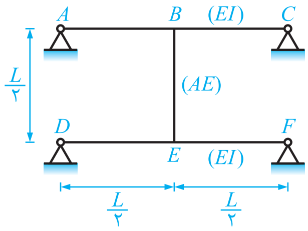
$$\begin{cases} \text{معادلهٔ سازگاری}: \downarrow \Delta_B = \Delta_{B'} \\ \downarrow \Delta_{B'} = \Delta_{\text{فنر}} + \Delta_C \end{cases} \Rightarrow \text{معادلهٔ سازگاری}: \downarrow \Delta_B = \Delta_{\text{فنر}} + \Delta_C$$

در ادامه با استفاده از روابط خیز و شیب در تیرهای کنسولی، معادلهٔ سازگاری را جایگذاری می‌کنیم:

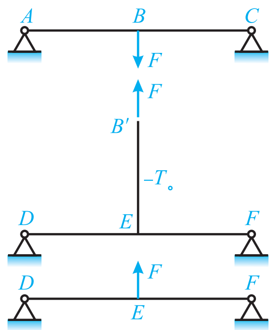
$$\Delta_{\text{فنر}} = \frac{F_{\text{فنر}}}{k} \quad , \quad \Delta_C = \frac{FL^3}{3EI}$$

$$\frac{qL^4}{8EI} - \frac{FL^3}{3EI} = \frac{F}{\frac{EI}{L^3}} + \frac{FL^3}{3EI} \Rightarrow F = \frac{3}{40}qL$$

تمرین ۱۲-۱۳: در سازهٔ مقابل، عضو BE کابل می‌باشد. در صورت کاهش دمای این عضو به مقدار T_0، نیروی داخلی ایجاد شده در آن را به‌دست آورید.



حل: با اندکی دقت، می‌توان دریافت که سازه از اتصال دو قسمت بـه تنهـایی پایـدار ABC و DEF، توسط یک کابل تشکیل شده است. برای حل، کافیست سازه را از محل اتصال قسمت فوقانی بـه کابـل جدا کرده و معادلهٔ سازگاری را به صورت زیر تعریف کنیم:



$$\downarrow \Delta_B = \Delta_{B'} \quad , \downarrow \Delta_B = \frac{FL^3}{48EI} \quad , \quad \Delta_{B'} = \Delta_{B'E} + \Delta_E$$

$$\downarrow \Delta_{B'E} = \alpha \frac{L}{2} T_0 - \frac{F\frac{L}{2}}{AE}$$

$$\downarrow \Delta_E = -\frac{FL^3}{48EI}$$

بنابراین معادلهٔ سازگاری به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\frac{FL^3}{48EI} = (\alpha \times \frac{L}{2} T_0 - \frac{F \times \frac{L}{2}}{AE}) + (-\frac{FL^3}{48EI}) \Rightarrow F(\frac{L^3}{48EI} + \frac{L^3}{48EI} + \frac{L}{2AE}) = \alpha \frac{L}{2} \times T_0$$

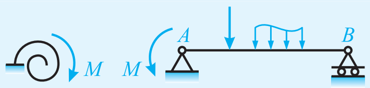
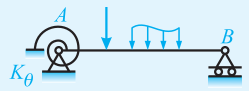
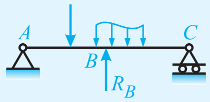
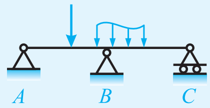
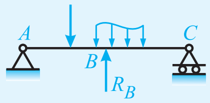
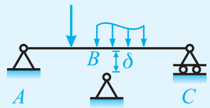
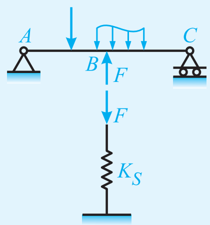
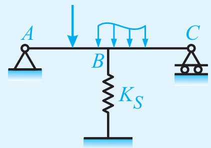
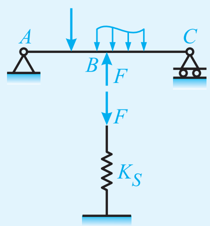
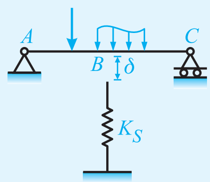
$$\Rightarrow F(\frac{L^2}{12EI} + \frac{1}{AE}) = \alpha T_0 \Rightarrow F = \frac{\alpha T_0}{\frac{L^2}{12EI} + \frac{1}{AE}}$$

تذکر: دقت شود که کم شدن دمای کابل، نقطهٔ B' را به اندازهٔ $\Delta T \times L_{\text{کابل}}\alpha$ پایین می‌آورد و با توجه به این که حرکت بـه سمت پـایین مثبت درنظر گرفته شده است، علامت آن در محاسبهٔ $\Delta_{B'E}$ مثبت درنظر گرفته شده است. از طرفی نیروی F باعث افزایش طـول کابـل و حرکت B' به سمت بالا شده و علامت آن در محاسبهٔ $\Delta_{B'E}$ منفی است.

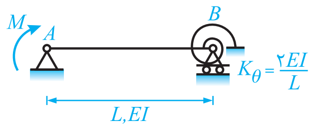
B-۴- مدل تیرهای دو سر مفصل نامعین

با روند کلی تحلیل سازه‌های نامعین با روش نیرو، در قسمت‌های قبل آشنا شدیم. در این قسمت می‌خواهیم ابتدا تیرهای دو سر مفصل نامعین و

پر تکرار در کنکور را به شما معرفی کرده و با نحوهٔ مناسب آزادسازی قید و معادلهٔ سازگاری مورد استفاده در قالب جدول زیر آشنا شویم:

معادلهٔ سازگاری	سازهٔ آزاد شده	سازهٔ اصلی
شیب نقطهٔ A روی تیر، با دوران فنر برابر است. $\curvearrowleft \theta_A = \theta_{\text{فنر}} = \frac{M}{K_\theta}$		
به دلیل وجود تکیه‌گاه در نقطهٔ B، خیز B صفر است. $\Delta_B = 0$		
جابه‌جایی نقطهٔ B، به اندازهٔ δ و به سمت پایین می‌باشد. $\downarrow \Delta_B = \delta$		
جابه‌جایی نقطهٔ B، با تغییر طول فنر برابر است. $\downarrow \Delta_B = \Delta_{\text{فنر}} = \frac{F}{K_S}$		
جابه‌جایی نقطهٔ B روی تیر، برابر با مجموع δ و تغییر طول فنر می‌باشد. $\downarrow \Delta_B = \delta + \Delta_{\text{فنر}} = \delta + \frac{F}{K_S}$		

در ادامه با حل چند تمرین، شما را با شیوهٔ استفاده از جدول فوق آشنا می‌کنیم.



تمرین ۱۲-۱۴: در تیر نامعین شکل مقابل:

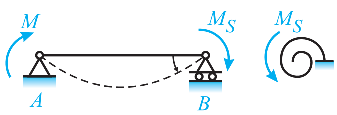
الف) لنگر ایجاد شده در فنر چقدر است؟

ب) دوران نقطهٔ A چقدر است؟

ج) انرژی کرنشی ذخیره شده در سازه چقدر است؟

حل: برای پاسخ به هر یک از سؤالات فوق، ابتدا لازم است تا لنگر ایجاد شده در فنر را محاسبه کنیم:

الف) مطابق جدول نشان داده شده، ابتدا فنر را از تیر جدا کرده و لنگر فنر را به صورت M_S، مطابق شکل زیر درنظر می‌گیریم:



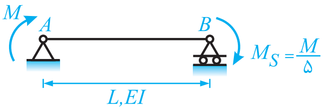
دقت شود که جهت صحیح M_S به‌گونه‌ای است که با جهت تغییر شکل ایجاد شده مخالفت می‌کند. لازم به ذکر است در صورتیکه جهت M_S را در روند حل اشتباه فرض کنیم، در انتهای حل مقدار آن منفی به‌دست می‌آید. معادلهٔ سازگاری برای محاسبه M_S به صورت زیر خواهد بود:

$$\curvearrowleft \theta_B = \theta_{\text{فنر}} = \frac{M_S}{K_\theta}$$

در ادامه برای محاسبهٔ θ_B با استفاده از روابط خیز و شیب در تیرهای دو سر مفصل، مطابق فصل (9) داریم:

$$\theta_B = -\frac{ML}{6EI} + \frac{M_S L}{3EI} \quad , \quad \theta_B = -\frac{M_S}{K_\theta} \Rightarrow -\frac{ML}{6EI} + \frac{M_S L}{3EI} = -\frac{M_S}{\frac{2EI}{L}} \Rightarrow M_S = \frac{M}{5}$$

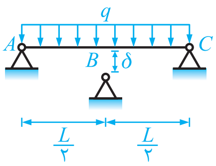
ب) در این مرحله با محاسبهٔ مقدار لنگر در محل فنر، با استفاده از روابط خیز و شیب تیرهای دو سر مفصل، دوران A را محاسبه می‌کنیم:



$$\curvearrowleft \theta_A = \frac{ML}{3EI} - \frac{M_S \times L}{6EI} = \frac{ML}{3EI} - \frac{\frac{M}{5} \times L}{6EI} = \frac{3ML}{10EI}$$

ج) برای محاسبهٔ مقدار انرژی کرنشی ذخیره شده در سازه، با توجه به این که بر سازه تنها یک بارگذاری اثر کرده است داریم:

$$U = \frac{1}{2} M \times (\text{دوران در محل اثر لنگر متمرکز}) = \frac{1}{2} \times M \times \theta_A = \frac{1}{2} \times M \times \frac{3ML}{10EI} = \frac{3M^2L}{20EI}$$

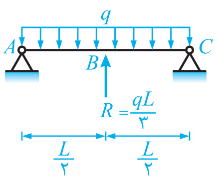


تمرین ۱۲-۱۵: **در تیر مقابل، مقدار δ را طوری بیابید که عکس‌العمل‌های ایجاد شده در هر سه تکیه‌گاه یکسان شوند؟ (EI ثابت است.)**

حل: می‌دانیم که معادلات تعادل در سازهٔ فوق، باید لزوماً برقرار باشد. در صورتی‌که عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی را با توجه به صورت تست در هر سه تکیه‌گاه یکسان و برابر R فرض کنیم، داریم:

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow 3R = qL \Rightarrow R = \frac{qL}{3}$$

تحت بار گستردهٔ نشان داده شده، نقطهٔ B قصد پایین آمدن داشته که پس از جابه‌جایی δ، به یک تکیه‌گاه رسیده و تکیه‌گاه با وارد کردن نیروی R به آن مانع از پایین آمدن بیشتر نقطهٔ B شده است. بنابراین نقطهٔ B تحت بار گسترده و نیروی R، در مجموع به اندازهٔ δ جابه‌جا شده و معادلهٔ سازگاری آن عبارت است از:

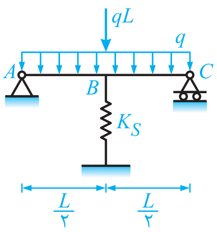


$$+\downarrow \Delta_B = \delta$$

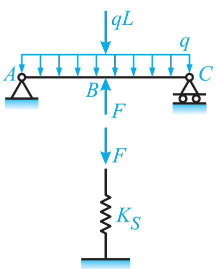
با استفاده از روابط خیز و شیب تیرهای دو سر مفصل داریم:

$$\Delta_B = \frac{5qL^4}{384EI} - \frac{RL^3}{48EI} = \delta \Rightarrow \frac{5qL^4}{384EI} - \frac{\frac{qL}{3} \times L^3}{48EI} = \delta \Rightarrow \delta = \frac{7qL^4}{1152EI}$$

تمرین ۱۲-۱۶: **در تیر زیر، مقدار K_S را طوری بیابید که لنگر خمشی در نقطهٔ B صفر شود. (EI ثابت است.)**



حل: با استفاده از جدول ارائه شده، سازهٔ آزاد شده و معادلهٔ سازگاری معادل با آن به صورت زیر است:



$$\downarrow \Delta_B = \Delta_{\text{فنر}}$$

با توجه به خواستهٔ مسئله، لنگر در نقطهٔ B از تیر را محاسبه نموده و برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$M_B = \frac{qL^2}{8} + \frac{(qL - F)L}{4} = 0 \Rightarrow F = \frac{3qL}{2}$$

در ادامه با محاسبهٔ Δ_B و $\Delta_{\text{فنر}}$ و جایگذاری در رابطهٔ سازگاری، K_S به سادگی محاسبه می‌شود:

$$\begin{cases} \Delta_B = \frac{5qL^4}{384EI} + \frac{(qL - F)L^3}{48EI} = \frac{5qL^4}{384EI} + \frac{(qL - \frac{3qL}{2})L^3}{48EI} = \frac{qL^4}{384EI} \\ \Delta_{\text{فنر}} = \frac{F}{K_S} = \frac{\frac{3qL}{2}}{K_S} = \frac{3qL}{2K_S} \end{cases}$$

$$\Delta_B = \Delta_{\text{فنر}} \Rightarrow \frac{qL^4}{384EI} = \frac{3qL}{2K_S} \Rightarrow K_S = \frac{576EI}{L^3}$$

C- استفاده از روش کار مجازی در تحلیل سازه‌های نامعین به روش نرمی

برای درک بهتر مفاهیم این قسمت، مطالب آن را در دو قسمت به شرح زیر به شما ارائه می‌کنیم:

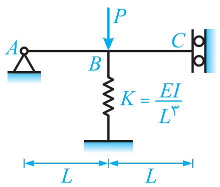
1- C- تحلیل تیرها و قاب‌های نامعین با استفاده از روش کار مجازی

2- C- تحلیل خرپاهای نامعین با استفاده از روش کار مجازی

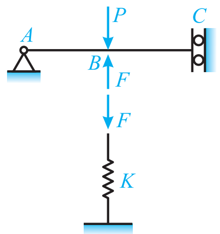
C- ۱- تحلیل تیرها و قاب‌های نامعین با استفاده از روش کار مجازی

معمولاً در کنکور حل سازه‌های یک درجه نامعین با روش نرمی توصیه می‌شود. برای تحلیل برخی از سازه‌های یک درجه نـامعین بـه روش نرمی، پس از آزادسازی یک قید، محاسبهٔ تغییر شکل موردنظر در رابطهٔ سازگاری با اسـتفاده از روابـط حفظـی خیـز و شـیب کـار دشـواری می‌باشد. در چنین حالت‌هایی توصیه می‌شود از روش کار مجازی برای محاسبه تغییر شکل موردنظر در رابطهٔ سازگاری استفاده شـود. بـرای درک بهتر این موضوع به مثال زیر توجه شود:

تمرین ۱۲-۱۷: **در سازهٔ مقابل، نیروی فنر را به‌دست آورید. (EI ثابت است)**

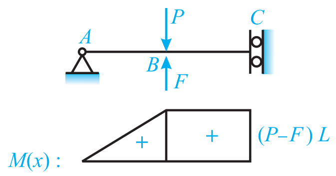


● **حل:** این سازه یک درجه نامعین بوده و برای حل، ابتدا فنر را از نقطهٔ B جدا کرده و معادلهٔ سازگاری معـادل با آن را به صورت مقابل تعریف می‌کنیم:

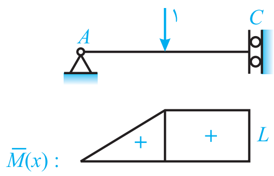


$$\downarrow \Delta_B = \Delta_{\text{فنر}}$$

در ادامه برای به‌دست آوردن جابه‌جایی نقطهٔ B، از روش کار مجازی استفاده می‌کنیم (توجه شود که محاسـبهٔ جابه‌جایی B با استفاده از روابط حفظی کمی دشوار است):



(سازهٔ اصلی)



(سازهٔ مجازی)

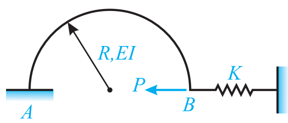
$$\downarrow \Delta_B = \int \frac{M\bar{M}}{EI}dx = \frac{1}{EI}\times\left[\frac{(P-F)L\times L\times L}{3} + (P-F)L\times L\times L\right] = \frac{4(P-F)L^3}{3EI}$$

$$\downarrow \Delta_{\text{فنر}} = \frac{F}{K} = \frac{F}{\frac{EI}{L^3}} = \frac{FL^3}{EI}$$

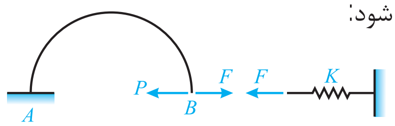
و با یکسان قراردادن Δ_B و $\Delta_{\text{فنر}}$ در معادلهٔ سازگاری داریم:

$$\downarrow \Delta_B = \Delta_{\text{فنر}} \Rightarrow \frac{4(P-F)L^3}{3EI} = \frac{FL^3}{EI} \Rightarrow F = \frac{4P}{7}$$

تمرین ۱۲-۱۸: **انتهای یک نیم حلقه، توسط یک فنر مطابق شکل بسته شده است. تحت اثر نیروی P، نیـروی ایجاد شده در فنر را به‌دست آورید. $\left(K = \frac{EI}{\pi R^3}\right)$**



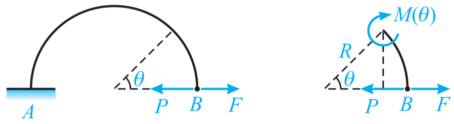
● **حل:** این سازه یک درجه نامعین بوده و برای تحلیل آن مشابه با تست قبل، ابتدا فنر را از سـازه جـدا کـرده و بـه یـاد فنـر حـذف شـده، عکس‌العمل آن را روی سازه وارد می‌کنیم. معادلهٔ سازگاری در این حالت به صورت زیر نوشته می شود:



$$\overset{+}{\longleftarrow} \Delta_{B_x} = \Delta_{\text{فنر}} \quad \text{(معادلهٔ سازگاری)}$$

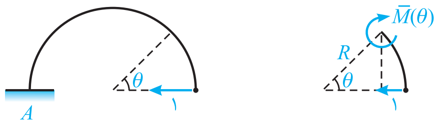
برای محاسبهٔ جابه‌جایی افقی نقطهٔ B در معادلهٔ سازگاری، با استفاده از روش کار مجازی داریم:

تحلیل سازهٔ اصلی:



$$M(\theta)=(F-P)\times R\sin\theta$$

تحلیل سازهٔ مجازی:



$$\bar{M}(\theta)=-1\times R\sin\theta$$

$$\Delta_B=\int_0^{\pi}\frac{M\bar{M}}{EI}R\,d\theta=\int_0^{\pi}\frac{(F-P)R\sin\theta\times(-1)R\sin\theta}{EI}\times R\,d\theta$$

$$\Delta_B=\frac{(P-F)R^3}{EI}\times\int_0^{\pi}\sin^2\theta\,d\theta=\frac{(P-F)R^3}{EI}\left[\frac{\theta}{2}-\frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^{\pi}=\frac{\pi(P-F)R^3}{2EI}$$

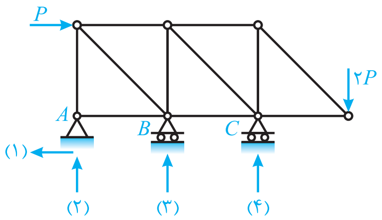
$$\Delta_{B_x}=\Delta_{\text{فنر}}\Rightarrow\frac{\pi(P-F)R^3}{2EI}=\frac{F}{\frac{EI}{\pi R^3}}\Rightarrow F=\frac{P}{3}$$

تذکر: دقت شود که در روش کار مجازی لزوماً نیروی یک وارد بر سازهٔ مجازی را در جهت مثبت تغییر مکان باید وارد کنیم.

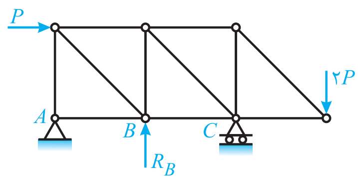
C - ۲- تحلیل خرپاهای نامعین با استفاده از روش کار مجازی

به طور کلی نامعینی در خرپاها، به دو صورت نامعینی خارجی و یا نامعینی داخلی در سازه ظاهر می‌شود. روند حل مسأله برای هر یک از این حالت‌ها را به طور جداگانه در مثال‌های زیر مورد بررسی قرار می‌دهیم.

الف) نامعینی خارجی:



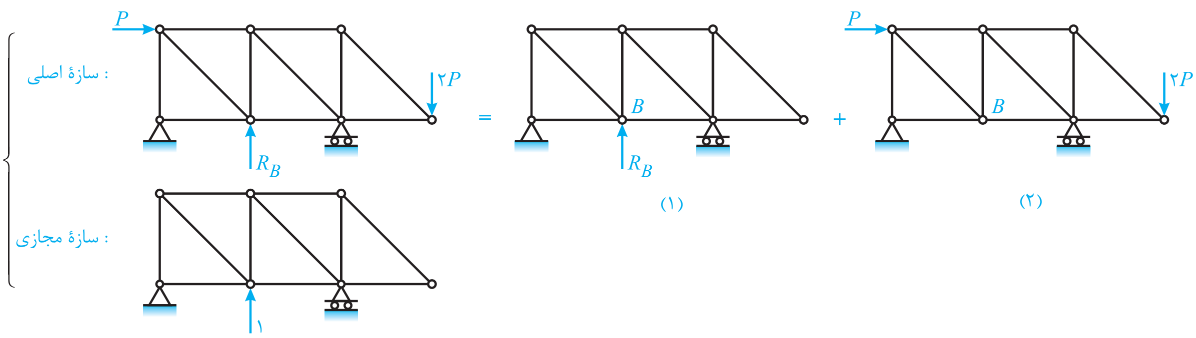
خرپای مقابل را درنظر بگیرید. این خرپا از نظر داخلی یک جسم صلب و معین بوده که با چهار عکس‌العمل تکیه‌گاهی به زمین متصل شده و در مجموع یک درجه نامعین می‌باشد.



دقت شود که این نامعینی به دلیل وجود تکیه‌گاه خارجی اضافی در سازه بوده و لذا نامعینی خرپا خارجی محسوب می‌شود. در ادامه با فرض این‌که تکیه‌گاه غلتکی B، قید اضافی در خرپا است آن را حذف کرده و در محل آن به یاد تکیه‌گاه حذف شده یک عکس‌العمل تکیه‌گاهی مجهول (R_B) را بر سازه وارد می‌کنیم. معادلهٔ سازگاری معادل با قید آزاد شده در این حالت به صورت زیر خواهد بود:

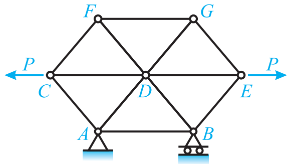
$$\uparrow\ \Delta_{B_y}=0\ (\text{معادلهٔ سازگاری})$$

در ادامه برای راحتی محاسبات با استفاده از اصل جمع آثار قوا به جای خرپای فوق از مجموع دو خرپای (1) و (2) استفاده کرده و با استفاده از روش کار مجازی، جابه‌جایی قائم نقطهٔ B را محاسبه کرده و با اعمال آن در معادلهٔ سازگاری، مقدار R_B را به‌دست می‌آوریم.



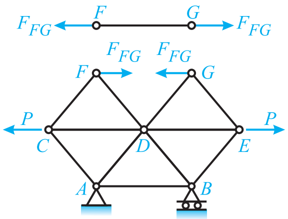
$$\Delta_{B_y}=\sum\frac{F_1\bar{F}L}{AE}+\sum\frac{F_2\bar{F}L}{AE}=0\Rightarrow R_B\ \text{به‌دست می‌آید.}$$

ب) نامعینی داخلی:



خرپای مقابل را درنظر بگیرید. این خرپا از یک جسم صلب نامعین (از نظر داخلی) تشکیل شده است که توسط سه قید تکیه‌گاهی به زمین متصل بوده و یک درجه نامعین است (چرا؟).

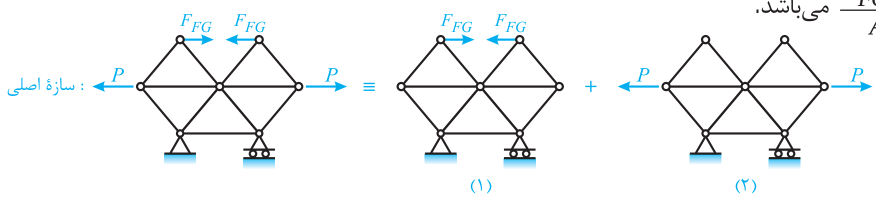
قیدهای تکیه‌گاهی خرپا در این سازه معین بوده و با استفاده از سه معادلهٔ تعادل در صفحه $(\sum F_x = 0, \sum F_y = 0, \sum M_A = 0)$ به‌دست می‌آیند. شایان ذکر است اگر درجهٔ نامعینی داخلی در خرپا را مانند آنچه در فصل 3 ذکر شده محاسبه کنیم مشخص می‌شود که خرپا از نظر داخلی یک درجه نامعین می‌باشد.

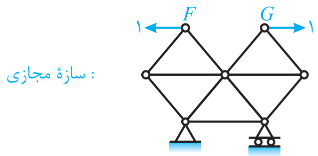


برای حل این‌گونه خرپاها، نیروی یکی از میله‌های آن را به عنوان قید اضافی درنظر گرفته و این عضو را از خرپا حذف می‌کنیم، در ادامه اثر نیروی این عضو را روی خرپا به صورت مجهول درنظر گرفته و معادلهٔ سازگاری را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\Rightarrow \quad (\text{افزایش فاصله مثبت فرض شده است}) \quad \Delta_{F/G} = \Delta L_{FG} = \frac{F_{FG}\, L}{AE}$$

$\Delta_{F/G}$، جابه‌جایی نسبی نقاط F و G از خرپا بوده که با استفاده از اصل جمع آثار و به روش کار مجازی، به صورت زیر محاسبه شده و ΔL_{FG} افزایش طول عضو FG می‌باشد که برابر $\frac{F_{FG} \times L}{AE}$ می‌باشد.



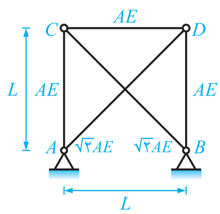


$$\Delta_{F/G} = \sum \frac{F_1 \bar{F} L}{AE} + \sum \frac{F_2 \bar{F} L}{AE}$$

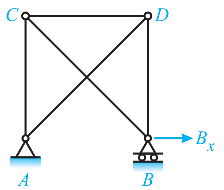
با اعمال رابطهٔ فوق در معادلهٔ سازگاری، نیروی F_{FG} به‌دست می‌آید.

تذکر: دقت شود که چون نیروی عضو FG کششی درنظر گرفته شده است، این نیرو باعث افزایش فاصلهٔ نقاط F و G شده است. بنابراین ΔL_{FG}، با توجه به این که افزایش فاصله را مثبت فرض کرده‌ایم، دارای علامت مثبت است. از طرفی با توجه به این که افزایش فاصله مثبت فرض شده است، در سازهٔ مجازی باید لزوماً نیروهای واحد در F و G را به صورت دور شونده بر سازه وارد کنیم.

تمرین ۱۲-۱۹: در سازهٔ مقابل اگر دمای عضو CD از خرپا به میزان ΔT افزایش یابد، نیروی ایجاد شده در آن عضو چقدر است؟ (ضریب انبساط حرارتی اعضاء α فرض می‌شود)

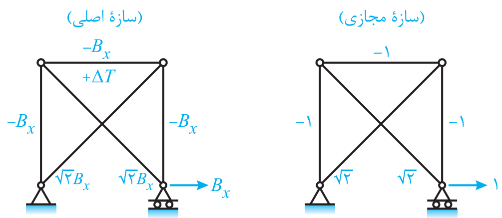


حل: خرپا یک درجه نامعین خارجی است (چرا؟) بنابراین با آزادسازی یکی از قیدهای تکیه‌گاهی آن و استفاده از یک معادلهٔ سازگاری، می‌توان آن را به یک خرپای معین تبدیل کرد. به همین منظور قید افقی تکیه‌گاه در B را آزاد کرده و به یاد قید حذف شده، عکس‌العمل آن (B_x) را روی خرپا وارد می‌کنیم. معادلهٔ سازگاری معادل با قید حذف شده، به صورت زیر خواهد بود:



$$\Delta_{B_x} = 0 \; (\text{معادلهٔ سازگاری})$$

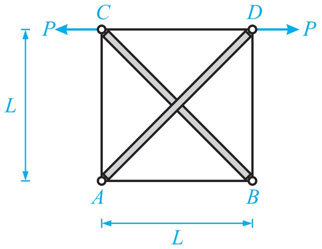
برای محاسبه جابه‌جایی نقطهٔ B، با استفاده از روش کار مجازی مطابق آنچه در فصل پنجم یاد گرفتیم، داریم:



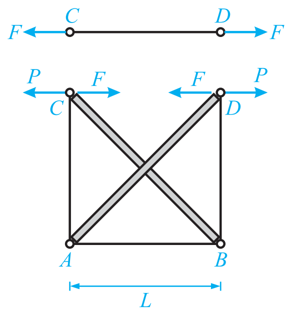
$$\Delta_{B_x} = \sum \frac{F \bar{F} L}{AE} + \sum \bar{F} \alpha L \Delta T = 3 \times \frac{(-B_x) \times (-1) \times L}{AE} + 2 \times \frac{\sqrt{2} B_x \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} L}{\sqrt{2} AE} + (-1) \alpha L \Delta T = 0$$

$$\Rightarrow \; B_x = \frac{1}{7} AE \alpha \Delta T \; \Rightarrow \; F_{CD} = -B_x = -\frac{1}{7} AE \alpha \Delta T \; (\text{فشاری})$$

تمرین ۱۲-۲۰: در خرپای مقابل، نیروی ایجاد شده در میله‌های صلب چقدر است؟ (صلبیت محوری اعضاء غیر صلب، AE فرض شود)

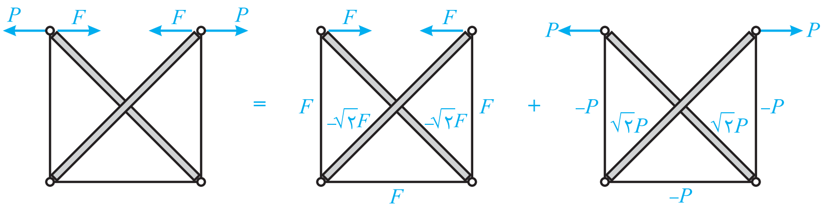


حل: با توجه به مفاهیم فصل سوم کتاب، این خرپا از نظر داخلی یک درجه نامعین است. بنـابراین برای تحلیل آن با استفاده از روش نرمی، باید یکی از اعضاء آن را از سازه جدا کرده و با استفاده از یک معادلهٔ سازگاری، نیروی عضو آزاد شده را محاسبه کنیم. بدین منظور عضو CD را از خرپا جدا کرده و عکس‌العمل نیروی این عضو را روی قسمت باقی ماندهٔ خرپا درنظر می‌گیریم. معادلهٔ سازگاری در ایـن حالت به صورت زیر درنظر گرفته می‌شود:



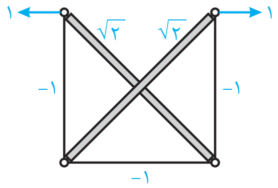
$$\Delta L_{CD} = \Delta_{\frac{C}{D}} \quad \text{(افزایش فاصله مثبت است)}$$

برای محاسبهٔ افزایش فاصلهٔ نقاط C و D در خرپا با استفاده از روش کار مجازی مطابق فصل (5) به صورت زیر عمل می‌کنیم. دقت شود که به جهت ساده‌سازی در محاسبات سازهٔ اصلی، آن را به صورت مجموع دو خرپای (1) و (2) درنظر می‌گیریم:



(سازهٔ اصلی) (۱) (۲)

در ادامه برای یافتن افزایش فاصلهٔ نقاط C و D در خرپا، سازهٔ مجازی را به صورت زیر درنظر می‌گیریم:



(سازهٔ مجازی)

$$\Delta_{\frac{C}{D}} = \Sigma \frac{F_1 \bar{F} L}{AE} + \Sigma \frac{F_2 \bar{F} L}{AE}$$

$$\Rightarrow \Delta_{\frac{C}{D}} = 3 \times \frac{F \times (-1) \times L}{AE} + 3 \times \frac{(-P) \times (-1) \times L}{AE} \Rightarrow \Delta_{\frac{C}{D}} = -\frac{3FL}{AE} + \frac{3PL}{AE}$$

با اعمال رابطهٔ فوق در معادلهٔ سازگاری، داریم:

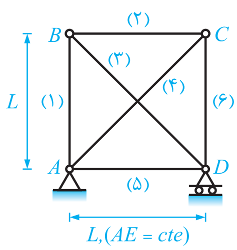
$$\Delta L_{CD} = \Delta_{\frac{C}{D}} \Rightarrow \frac{FL}{AE} = -\frac{3FL}{AE} + \frac{3PL}{AE} \Rightarrow F = \frac{3P}{4}$$

در ادامه نیروی میله‌های صلب، به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$F_{BC} = F_{AD} = -\sqrt{2}F + \sqrt{2}P = -\sqrt{2} \times \frac{3P}{4} + \sqrt{2}P = \frac{\sqrt{2}P}{4}$$

نکته: در صورتی‌که نیروهای داخلی یک سازهٔ نامعین در اختیار باشد، برای محاسبهٔ تغییر مکانها و یا دورانهـای نقـاط دلخـواه از ایـن سـازهٔ نامعین، می‌توان قسمتی پایدار و معین را از آن جدا کرده به طوری که نقطهٔ موردنظر در این قسمت جدا شده قرار گیرد و در ادامه با استفاده از روش کار مجازی، تغییر مکان و یا دوران نقطهٔ مربوطه را به‌دست می‌آوریم. برای درک بهتر این نکته، به مثال‌های زیر دقت شود:

تمرین ۱۲-۲۱: خرپای نامعین مقابل مفروض است اگر نیروی محوری اعضاء در اثر بارگذاری دلخواه را F_i بنـامیم، تغییر مکان افقی نقطهٔ C برابر است با: (سراسری 87)



1) $\frac{L}{AE}(\sqrt{2}F_4 - F_6)$

2) $\frac{L}{AE}(F_4 - 2F_6)$

3) $\frac{L}{AE}(2F_4 - F_6)$

4) $\frac{L}{AE}(F_4 - \sqrt{2}F_6)$